

## ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ УРОЖАЙНОСТИ ЗЕРНОВЫХ КУЛЬТУР

А.В. Розанов<sup>1</sup>, С.Н. Потемкина<sup>2</sup>, П.С. Пахомова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет генетики, биотехнологии и инженерии имени Н.И. Вавилова, г. Саратов, Россия

<sup>2</sup>Тольяттинский государственный университет, г. Тольятти, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

[arosanov@yandex.ru](mailto:arosanov@yandex.ru)

Т. +7 (904) 243 38 97

**Аннотация.** На основе фрактального анализа динамики и структуры временных рядов урожайности зерновых культур проведено исследование принципиальной возможности получения надежных и достоверных прогнозов при кратко- и среднесрочных горизонтах планирования. В качестве фактографической основы для анализа использованы исторические данные урожайности зерновых в России и США за период, превышающий 170 лет. Применение модифицированного непараметрического *R/S*-анализа позволило установить, что ряды урожайности зерновых относятся к фрактальным персистентным рядам, имеющим устойчивые тренды и непериодические циклические структуры, и, следовательно, принципиально поддаются достоверному прогнозированию.

**Ключевые слова:** урожайность зерновых, прогнозирование, *R/S*-анализ, показатель Хёрста, фрактальные временные ряды, персистентность, трендоустойчивость,

**Для цитирования:** Розанов А.В., Потемкина С.Н., Пахомова П.С. ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ УРОЖАЙНОСТИ ЗЕРНОВЫХ КУЛЬТУР / Розанов Александр Владимирович, Потемкина Светлана Николаевна, Пахомова Полина Сергеевна // Агрофорсайт. 2023. № 3 — Саратов: ООО «ЦеСАин», 2023. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Загл. с этикетки диска.

### FRactal Analysis of Yield Time Series Grain Crops

A.V. Rozanov<sup>1</sup>, S.N. Potemkina<sup>2</sup>, P.S. Pakhomova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University of Genetics, Biotechnology and Engineering named after N.I. Vavilov, Saratov, Russia

<sup>2</sup>Togliatti State University, Tolyatti, Russia

<sup>3</sup>Moscow State Technical University named after N.E. Bauman, Moscow, Russia

[arosanov@yandex.ru](mailto:arosanov@yandex.ru)

Т. +7 (904) 243 38 97

**Abstract.** Based on a fractal analysis of the dynamics and structure of time series of grain crop yields, a study was conducted of the fundamental possibility of obtaining reliable and reliable forecasts for short- and medium-term planning horizons. Historical data on grain yields in Russia and the USA for a period exceeding 170 years were used as the factual basis for the analysis. The use of a modified nonparametric *R/S* analysis made it possible to establish that grain yield series belong to fractal persistent series that have stable trends and non-periodic cyclic structures, and, therefore, are fundamentally amenable to reliable forecasting.

**Key words:** grain yield, forecasting, *R/S* analysis, Hurst exponent, fractal time series, persistence, trend stability

**For citing:** Rozanov A.V., Potemkina S.N., Pakhomova P.S. FRactal Analysis of Yield Time Series Grain Crops / Rozanov A.V., Potemkina S.N., Pakhomova P.S. // Agroforesight. 2023. No. 3- Saratov: LLC "Center for Social Agroinnovations of SGAU", 2023. - 1 electron. wholesale disc (CD-ROM). - Title from the disc label. (In Russ.)

## Введение

Урожайность большинства сельскохозяйственных культур, особенно в условиях рискованного земледелия, в значительной мере зависит от природных и климатических условий, технологий возделывания почвы, севооборота, экологического и техногенного давления и многих других факторов. Множественность и различие характера воздействий, их скрытые взаимосвязи и слабая предсказуемость серьезно осложняют планирование валовых сборов зерна, мощностей по его хранению и переработке, логистике, прибыли и других макро и микроэкономических показателей. В подобных условиях поиск, обоснование и разработка эффективных, надежных и достоверных прогнозов урожайности наиболее рентабельных сельскохозяйственных культур становится очень актуальной проблемой.

Целью настоящей статьи является определение принципиальной возможности и условий построения надежных и достоверных кратко- и среднесрочных прогнозов урожайности зерновых культур в Российской Федерации и других странах, производителях товарной зерновой продукции.

### Временные и вероятностные характеристики урожайности зерновых культур

Урожайность сельскохозяйственных культур сложным образом зависит от множества природных, климатических, биологических и техногенных процессов, нелинейно связанных друг с другом.

На рисунке 1 представлены годовые показатели урожайности России и США – двух крупнейших производителей зерновой продукции на мировом рынке – на временном промежутке длительностью более 170 лет [1].

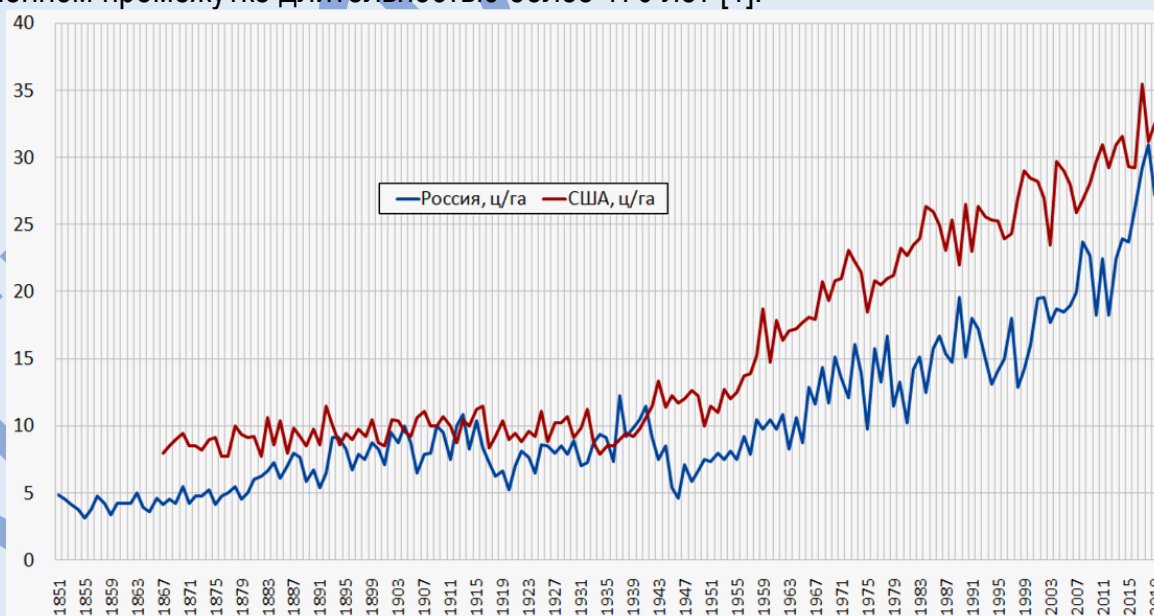


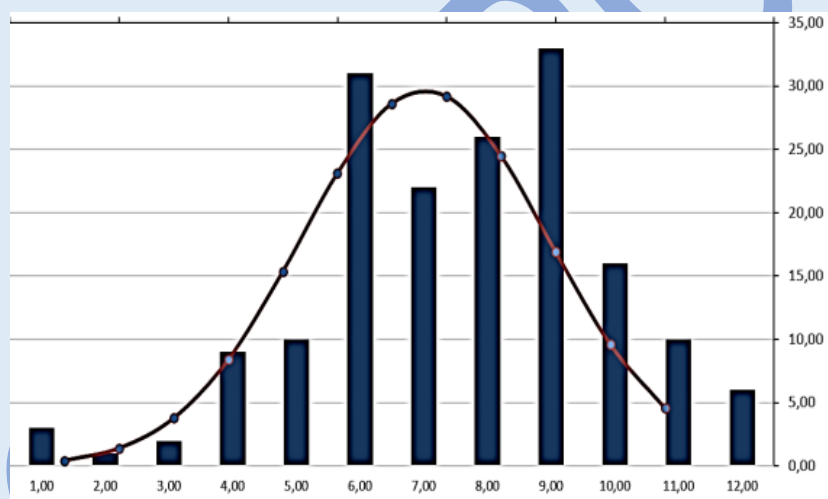
Рисунок 1–Временные ряды урожайности России в период 1851 – 2022 гг. (выделена синим цветом) и США в период 1867 – 2022 гг. (выделена красным цветом) [Агрофорсайт, <http://agroforsait.ru>]

Хорошо видно, что кривые урожайности имеют вид негладких, сильно изломанных функций, нелинейно изменяющихся во времени.

Такое поведение характерно для многих природных процессов и явлений, зависящих от климатических, погодных, биогенных и других слабо предсказуемых факторов среды, и демонстрирующих вероятностный характер своей динамики.

Проведенный авторами анализ распределений вероятностей для кривых урожайности показал, что распределения вероятностей для России и США (См. рисунки 2 и 3) не является унимодальными, а представляет собой результат наложения одновершинного распределения, близкого к Гауссовому, и двумодального распределения, типичного для квазипериодических или частично хаотических колебательных процессов. Во временной области кривые урожайности имеют вид достаточно протяженных участков с высокой дисперсией и сильной изрезанностью и характеризуются ежегодными быстрыми «переключениями» от положительных максимумов к отрицательным.

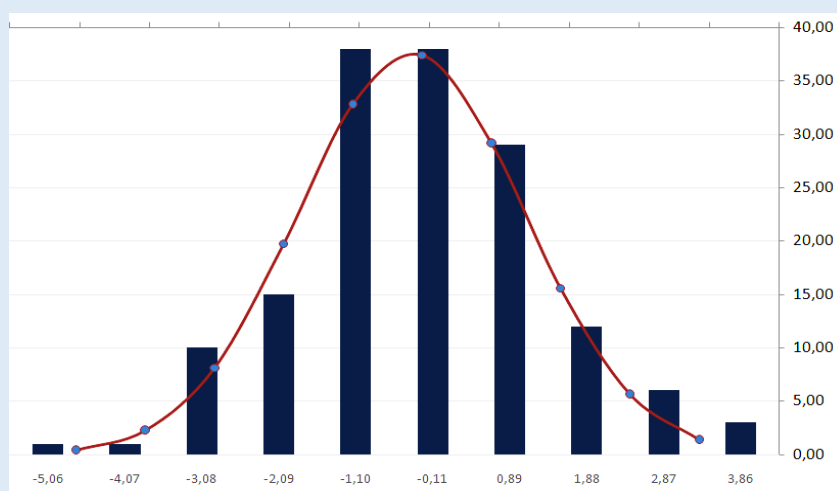
Это означает, что рассматриваемые временные ряды не удовлетворяют ни условиям стационарности, ни статистической независимости.



**Рисунок 2 – Гистограмма урожайности зерновых в России с наложенной на нее кривой нормального распределения [Авторские результаты]**

С точки зрения классической статистики, опирающейся на закон больших чисел, результат наложения большого числа слабо связанных случайных процессов с произвольными законами распределения, на больших временных промежутках должен приводить к нормализации результирующего процесса.

Однако, как впервые было показано известным британским гидрологом Гарольдом Хёрстом (Harold Edwin Hurst, 1880-1978), для многих природных и климатических явлений и процессов, таких как, разливы рек, землетрясения, наводнения, извержения вулканов, количество солнечных пятен и т.п., нормализация не происходит, даже на очень больших временных периодах в сотни и тысячи лет. Вместо ожидаемой нормализации наблюдается хаотическая перемежаемость нескольких негладких, сильно изломанных, непериодических колебаний [3 - 5].



**Рисунок 3 – Гистограмма урожайности зерновых в США с наложенной на нее кривой нормального распределения [Авторские результаты]**

Анализ временных и вероятностных характеристик рассматриваемых рядов урожайности зерновых даёт основание отнести их к особому классу процессов или явлений, для которых традиционные методы статистического анализа, предполагающие нормальность распределений вероятности, оказываются мало пригодными.

Для мониторинга, анализа и предсказания динамики таких процессов в настоящее время применяют методы фрактального анализа [3, 4].

### **Средства идентификации фрактальной структуры временных рядов**

Предметом изучения фрактального анализа являются математические или природные объекты, процессы или явления, демонстрирующие четко выраженную фрагментарность, искривленность или изломанность, а также определенную повторяемость (скейлинг – масштабную инвариантность) в широком диапазоне параметров [2, 6]. Временные ряды урожайности зерновых, как показано выше, относятся именно к таким объектам и процессам.

Одним из эффективных методов идентификации фрактального характера различных динамических явлений и процессов является модифицированный метод *R/S*-анализа, основы которого заложены Гарольдом Хёрстом.

В качестве конструктивного индикатора фрактальности процессов или явлений в настоящее время принято использовать параметр Хёрста *H*.

В процессе выполнения данной работы величина параметра Хёрста *H* определялась следующим образом. На предварительном этапе обработки данных об урожайности зерновых на территориях России и США, представленных на Рисунке 1, методом, разработанным авторами в [1], была исключена трендовая составляющая. Затем были сформированы ряды приращений вида:

$$Y_{avr} = \frac{X_{i+1}}{X_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (1)$$

где  $N$  – число периодов наблюдения. Для России  $N = 172$ , для США  $N = 165$ . Затем для каждого ряда приращений были рассчитаны выборочные средние арифметические значения  $Y_{avr}$  и стандартные отклонения  $S$  ( $K = N - 1$ ):

$$Y_{avr} = \sum_{i=1}^K Y_i, \quad S = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (Y_i - Y_{avr})^2} \quad (2)$$

Накопленные отклонения  $W_i$  для  $i = 1, 2, \dots, K$  определялись по формуле:

$$W_i = \sum_{i=1}^K (Y_i - Y_{avr}) \quad (3)$$

Массив значений  $W_i$  для  $i = 1, 2, \dots, K$  позволяет вычислить максимальные и минимальные значения накопленного отклонения и определить его размах  $R$ :

$$R = \text{MAX} \{W_i\} - \text{MIN} \{W_i\} \quad (4)$$

Именно размах накопленного отклонения  $R$  в рамках метода Хёрста является основной мерой регулярности или хаотичности временного ряда. Инвариантность величины  $R$  по отношению к операциям сдвига или изменения масштаба обеспечивается делением  $R$  на выборочное стандартное отклонение  $S$ , вычисляемое по формуле (2).

Хёрст для анализа и прогнозирования водности реки Нил использовал логарифмическую форму:

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log(a \cdot N)}, \quad (5)$$

где  $a$  – некоторая, эмпирически подбираемая константа, которую сам Хёрст определил, равной  $a = 0,5$ .

В настоящее время вместо классического показателя Хёрста  $H$  (5) применяют его скорректированные формы. В частности, авторы использовали более точные модификации показателя Хёрста, предложенные в работах Эрика Наймана (Erik Naiman) [7]. Э. Найман на основе компьютерного моделирования показал, что формула Хёрста (5) демонстрирует тенденцию к завышению величины  $H$ , оценивая даже чисто случайные ряды как персистентные, т.е. имеющие четко выраженные тренды.

Чтобы уменьшить погрешность вычисления нормированного размаха  $R/S$ , было предложено скорректировать формулу для расчета величины  $H$ , таким образом, чтобы значение показателя Хёрста для чисто случайных рядов и любых  $N > 20$  было бы наиболее близко к теоретическому значению  $H = 0,5$ .

Модифицированная формула для параметра Хёрста  $H_c$  имеет вид ( $a = \pi/2$ ):

$$H_c = \frac{\log(R/S_c)}{\log(\pi \cdot N/2)} \cdot (1,01136 - 0,0011 \cdot \ln(N)) \quad (6)$$

$$R/S_c = (R/S) \cdot 0,998752 + 1,051037$$

Скорректированные формулы были использованы для вычисления и сопоставления величин параметра Хёрста для временных рядов урожайности зерновых культур в России и США.

Проверка состоятельности вычисления показателя Хёрста проводилась по методике, предложенной Э. Петерсом, путем рандомизации (случайного перемешивания по оси времени) значений исследуемых временных рядов [8]. Э. Петерс установил, что если после расчета по рандомизированным данным величина показателя  $H$



оказывается близкой к 0,5, то это указывает на то, что временной ряд не обладает свойствами обобщенного броуновского движения и, следовательно, не является случайным.

### Результаты анализа и обсуждение

Значения параметра Хёрста для временных рядов, полученные опытным путем или в результате компьютерного моделирования, принято классифицировать следующим образом [9, 10].

При  $H = 0,5$  временной ряд является полностью случайным. Его текущие значения случайны и не коррелированы. С физической точки зрения такой ряд является моделью «белого шума».

Если  $0 \leq H < 0,5$ , то этот диапазон значений параметра Хёрста указывает на принадлежность временного ряда к антиперсистентным рядам, которые демонстрируют чередование больших и малых значений, причем, вслед за большим значением с большой вероятностью ожидается малое значение и наоборот.

В диапазоне значений  $0,5 < H \leq 1,0$  ряды демонстрируют персистентные (от лат. *persisto* остаюсь, упорствую), или трендоустойчивые, свойства, которые характеризуются тем, что за большим значением чаще следуют большие, за малым - малое, то есть мы имеем дело с более "гладким" процессом, причем каждое текущее значение ряда сохраняет память обо всех предшествующих значениях. Динамика временного ряда характеризуется долговременной памятью и сильным последствием.

Величина показателя Хёрста, вычисленная по реальным историческим данным для России за период 1851 ÷ 2022 гг. по формуле (6) с учетом корректирующих поправок, оказалась равной  $H = 0,7244$ . Эта величина близка к эмпирическому значению показателя Хёрста для природных явлений типа разливов рек, землетрясений, извержений вулканов и т.п., для которых величина  $H$  находится в пределах  $0,70 \div 0,75$  [5, 6]. После случайной перестановки значений временного ряда величина  $H$  уменьшилась до значения  $H = 0,5489$ , близкого к теоретическому значению 0,5 для чисто случайных процессов. Следовательно, динамика урожайности зерновых культур в России не является случайной, а демонстрирует фрактальные свойства персистентного ряда, имеющего устойчивый тренд и непериодические циклические структуры.

Расчеты, выполненные для урожайности зерновых культур в США по данным за период 1867 ÷ 2022 гг., показали аналогичные результаты: величина показателя Хёрста, вычисленная по реальным историческим данным, оказалась равной  $H = 0,7438$ , а по рандомизированным данным  $H = 0,5267$ .

### Заключение

На основе изучения структуры, динамики и фрактальных свойств временных рядов урожайности зерновых культур в России и США обоснована принципиальная возможность и определены условия построения надежных и достоверных кратко- и среднесрочных прогнозов урожайности зерновых культур в Российской Федерации и

других странах, производителях товарной зерновой продукции. Показано, что урожайность зерновых культур не является абсолютно случайной, но демонстрирует принципиально предсказуемые свойства персистентных фрактальных рядов, имеет устойчивые тренды и непериодические циклические структуры, т.е. поддается прогнозированию на научной основе.

Разработанные авторами методики и программное обеспечение для прогнозирования динамики временных рядов урожайности зерновых культур, оценки и минимизации рисков, могут быть адаптированы для формирования достоверных и надежных прогнозов в других сферах современного сельскохозяйственного производства и будут способствовать переходу сельского хозяйства Российской Федерации на более высокий качественный уровень, обеспечивая стабильные сборы урожая зерновых и масленичных культур, повышение потребительских характеристик зерна и реализацию оптимальной ценовой стратегии на внутреннем и мировых рынках, независимо от погодных условий и текущей конъюнктуры.

#### Список цитируемой литературы

1. Воротников И.Л., Розанов А.В., Богатырев С.А., Ключиков А.В. Методологические особенности долгосрочного прогнозирования урожайности зерновых культур // Аграрный научный журнал. – 2022. – № 11. – с. 34-37
2. Шестопал О.В., Черноиван Д.Н., Середина П.Б. Робастные методы построения и улучшения многомерной линейной и нелинейной регрессий // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2019. Том 13. №2. С. 46-51.
3. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
4. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000. –233с.
5. *Hurst H.* Methods of long-term storage in reservoirs // Proc. Inst. Civil Eng. 1956. Vol.5. p. 519-543.
6. Кожанов Р.В., Ткаченко И.М., Кожанова Е.Р. Показатель Хёрста как мера хаотичности временного ряда // Вестник СГТУ. 2020. № 2 (85).
7. Найман, Эрик. Расчет показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических показателей. [Электронный ресурс]. Код доступа: [http://wealthlab.net/Data/Sites/1/SharedFiles/doc/forindicators/articles/04\\_erik\\_naiman\\_herst.pdf](http://wealthlab.net/Data/Sites/1/SharedFiles/doc/forindicators/articles/04_erik_naiman_herst.pdf). Дата обращения: 10.11.2023
8. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
9. Бояршинов М. Г., Вавилин А. С., Васькина Е. В. Применение показателя Хёрста для исследования интенсивности транспортного потока // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2022. – №2. – с. 68–81
10. Nguyen N. Hidden Markov model for stock trading. International Journal of Financial Studies, 6(36), 2018.
11. Цифровой П.А. Графическое сравнение урожайности с Российской Империи/РСФСР/Российской Федерации с США с 1951 по 2018 годы  
[http://agroforsait.ru/%D0%B2%D1%8B%D0%BF%D1%83%D1%81%D0%BA%D0%B8/2019-2/%E2%84%961\\_2019/%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0-%D1%81%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%83%D1%80%D0%BE%D0%B6%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8-%D0%B7%D0%B5%D1%80%D0%BD/](http://agroforsait.ru/%D0%B2%D1%8B%D0%BF%D1%83%D1%81%D0%BA%D0%B8/2019-2/%E2%84%961_2019/%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BA%D0%B0-%D1%81%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%83%D1%80%D0%BE%D0%B6%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8-%D0%B7%D0%B5%D1%80%D0%BD/)